



UNIVERZITET U TUZLI
RUDARSKO-GEOLOŠKO-GRAĐEVINSKI FAKULTET



HIDROMEHANIKA

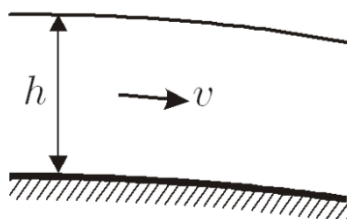
Prof. dr. sc. NEDIM SULJIĆ, dipl.ing.građ.

1

TEČENJE U OTVORENIM TOKOVIMA

1. OSNOVNI POJMOVI

- U otvorenom toku oblast strujanja nije unapred definisana.
- Pri strujanju u otvorenom toku položaj slobodne površine nije unapred poznat.
- Fluid se u toku strujanja „popne” do dubine h (slika dole).
- To je dodatna teškoća pri izučavanju strujanja fluida u otvorenom toku.



Tečenje u otvorenom toku

2

•Kretanje fluida u otvorenom toku f-ja od sila koje se pri strujanju javljaju.

•Glavne sile koje određuju tečenje su:

- a) sile težine i pritiska, koje predstavljaju osnovni faktor strujanja,
- b) sile trenja, koje su posljedice viskoznosti fluida,
- c) fiktivne inercijalne sile, koje su posljedice dejstva „pravih“ sila, a manifestuju se kroz promjenu v u vremenu i prostoru

•Ostale sile, (sile površinskog napona), $\Rightarrow$ posljedice rotacije Zemlje.

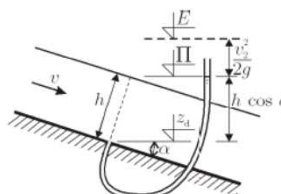
•Ove sile se zanemaruju, osim kada je njihov uticaj značajan.

3

•**Strujanje u otvorenom toku može biti:**

- Strujanje sa dominantnim silama težine i p i silama trenja, (tečenje u kanalima i prirodnim vodotocima, rijekama i potocima).
- Ovi „objekti“ imaju veliku dužinu nazivaju se **dugački objekti**.
- Struje sa dominantnim silama težine i p i fiktivnim inercijalnim silama, (tečenje oko preliva i drugih objekata sa naglim promjenama čvrstih granica).
- Ovakva strujanja se javljaju u neposrednoj blizini objekata, koji utiču na tečenje, zbog čega se takvi objekti zovu **kratki objekti**.
- U otvorenom toku poprečni presjek se definiše sa dubinom vode, h .
- “ h ” bi zbog tog uslova morala biti normalna na strujnice.
- U tom slučaju pijezometarska kota, Π u odnosu na kotu dna, z_d , iznosi:

$$\Pi = z_d + h \cos \alpha, \quad (A)$$

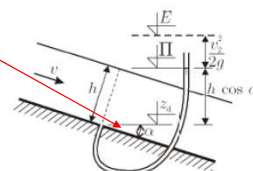


4

- Za uglove između apcise i dna toka (α) $< 11,5^\circ \Rightarrow \cos \alpha > 0,98 \Rightarrow$:

$$\Pi = z_d + h.$$

(B)



- J-na (B) = za sve dugačke objekte, kanale i rijeke
- J-na (A) = samo kada su podužni nagibi toka veoma veliki

- Na slobodnoj površini tečnosti: $p_{atm} = 0$

- Linija slobodne površine tečnosti = Π linija

- Pretpostavka: duž toka p_{atm} svugdje isti

- Ako p_{atm} nije svugdje isti $\Rightarrow$ računamo sa različitim p_{atm}

- Pretpostavljamo: na slobodnoj površini tečnosti nema smičućih napona:

$$\tau = 0.$$

5

2. J-NA ODRŽANJA ENERGIJE (BERNOULLI-EVA J-NA)

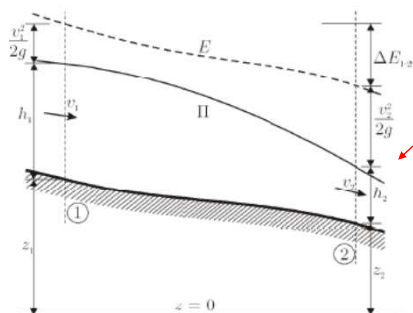
- Pretpostavka: tečenje ustaljeno $\Rightarrow \frac{\partial Y}{\partial t} = 0.$

• Ostvarenje pretpostavke:

- tečenje u otvorenom toku
- za jednu strujnicu između "1" i "2" važi j-na održanja energije
- j-na održanja energije (Bernoulli-eva j-na)

$$\frac{v_1^2}{2g} + h_1 + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + h_2 + z_2 + \Delta E_{1-2}.$$

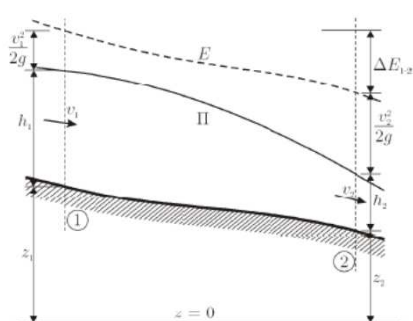
J-na "A"

 Π i E linija duž otvorenog toka

6

•Sa slike:

- prikazane Π i E linija u otvorenom toku između presjeka "1" i "2"
- u j-ni "A" potencijalna energija je po jedinici težine
- član $p/\rho g$ zamjenjen je dubinom vode h
- z_i nije rastojanje od referentne ravni već **rastojanje do dna presjeka**



$$\frac{v_1^2}{2g} + h_1 + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + h_2 + z_2 + \Delta E_{1-2}$$

J-na "A"

7

3. JEDNOLIKO TEČENJE

•Za ostvarenje jednolikog (uniformnog) tečenja potrebni su uslovi:

- Q ustaljen ($\partial Q / \partial t = 0$).
- korito vodotoka prizmatično sa istom hrapavosti i istim dubinama
- pad dna korita const. ($\partial I_d / \partial x = 0$).
- nema lokalnih otpora

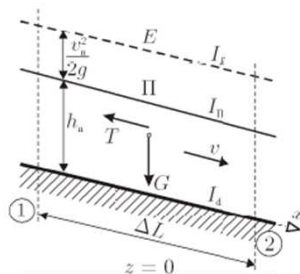
•Za ispunjenje uslova:

- korito vodotoka mora biti kanal (djelo čovjeka)
- pad Π , E i dna korita su **JEDNAKI**

$$I_d = I_\Pi = I_E.$$

8

- Slika dole: podužni presjek kanala u kome je jednoliko tečenje
 - pravac i smjer strujanja poklapa se sa x osom



Jednoliko tečenje u otvorenom toku

- pravac i smjer tečenja poklapaju se sa x osom
- dinamička j-na u kojoj se pojavljuju slijedeće sile:

1) $G_s = \rho g A \Delta L \frac{z_1 - z_2}{\Delta L}$. Sila težine u smjeru ose kanala

$P = A(p_1 - p_2) = 0$. Sila pritiska

2) $T = \tau O \Delta L$. Sila trenja

3) $T = G_s$. Dinamička j-na

9

- Ako j-ne 1) i 2) unesemo u j-nu 3) dobijamo:

$$\tau O \Delta L = \rho g A \Delta L \frac{z_1 - z_2}{\Delta L}$$

$$\tau = \rho g \frac{A}{O} I_d$$

$$\tau = \rho g R I_d$$

- Strujanje (tečenje) u kanalima najčešće turbulentno

- Turbulentno strujanje: važi kvadratni zakon otpora: $\frac{\tau}{\rho g} = \left(\frac{1}{C^2}\right)$

C – Šezijev koeficijent

Šezijeva j-na: $v = C \sqrt{R I_\Pi}$

- Šezijev koeficijent definiše se po Manningu: $C = \frac{1}{n} R^{1/6}$

$$v = \frac{1}{n} R^{2/3} I_\Pi^{1/2}, \quad \dots \text{ na osnovu dvije prethodne j-ne}$$

10

$$Q = \frac{1}{n} A R^{2/3} I_H^{1/2}$$

Proticaj pri jednolikom tečenju u otvorenom toku definisan preko Shezy-Manningove j-ne

- Jednoliko tečenje $\Rightarrow$ dubina vode u kanalu je **NORMALNA DUBINA h_n**

• **Kanal trougaonog poprečnog presjeka:**

- h_n izračunava se direktno

• **Kanal trapeznog i pravougaonog poprečnog presjeka:**

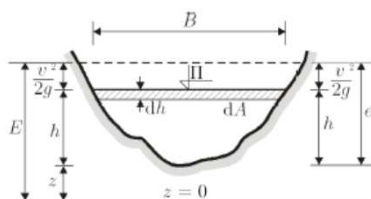
- h_n izračunava se iterativno

• **Uticaj R_e broja u otvorenim kanalima:**

- veća hrapavost kanala nego u cijevima
- zbog hrapavosti, R_e veći u kanalima nego u cijevima
- veći R_e $\Rightarrow$ tečenje u otvorenim kanalima skoro uvijek turbulentno

11

4. SPECIFIČNA ENERGIJA PRESJEKA I KRITIČNA DUBINA



Poprečni presjek otvorenog toka sa energijom po jedinici težine (E) i specifičnom energijom (e)

- Sa slike: energija po jedinici težine definisana sa $E = z + h + \frac{v^2}{2g}$.

- Sa slike: ako referentnu ravan pomjerimo na kotu najniže tačke na presjeku (kota dna) $\Rightarrow$ energija po jedinici težine = specifičnoj energiji presjeka e :

A)

$$e = h + \frac{v^2}{2g} = h + \frac{Q^2}{2gA^2}$$

Prvi član potencijalna energija po jedinici težine

Drugi član kinetička energija po jedinici težine

12

- Dimenzija specifične energije ista kao dimenzija energije po jedinici težine:

$$[e] = [E] = [L] = [m]$$

-Zakoničnost određena sa j-nom A): $e = e(h)$ za $Q = \text{const}$ i $Q = Q(h)$ za $e = \text{const}$.

$$e = h + \frac{v^2}{2g} = h + \frac{Q^2}{2gA^2} \quad \text{A)}$$

13

4.1 Zavisnost specifične energije od dubine vode pri const. Q (proticaj)

•Zavisnost $e=e(h)$ određuje se za promjenu: $0 \leq h \leq \infty$.

•Ako $h \rightarrow 0$: $\lim_{h \rightarrow 0} A = 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \left(h + \frac{Q^2}{2gA^2} \right) = +\infty$, definiše hor. asimptotu

•Ako $h \rightarrow \infty$: $\lim_{h \rightarrow \infty} A^2 = \infty \Rightarrow \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{Q^2}{2gA^2} = 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow \infty} \left(h + \frac{Q^2}{2gA^2} \right) = h$ definiše kosu asimptotu $\alpha = 45^\circ$

$e_{\min}$ uz uslov:

$$\frac{Q^2 B}{g A^3} = 1. \quad (1)$$

•Dubina vode koja zadovoljava j-nu (1) je **KRITIČNA DUBINA (h_k)**

14

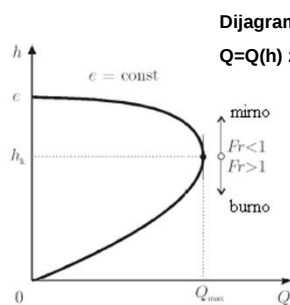
4.2 Zavisnost Q od dubine vode pri const. specifičnoj energiji

• Ako iz j-ne $e = h + \frac{v^2}{2g} = h + \frac{Q^2}{2gA^2}$ izrazimo Q dobijamo: $Q^2 = 2gA^2(e - h)$

$$Q = \sqrt{2g} A (e - h)^{1/2}$$

$$\frac{Q^2 B}{g A^3} = 1,$$

uslov za pojavu ekstremne vrijednosti Q



- $Q_{\max}$ kada je h_k

- pravougaoni poprečni presjek $h_k = (2/3)e$

15

4.3 Frudov broj i kritičan pad u kanalu

• Minimalna vrijednost specifične energije ($e_{\min}$) i max. vrijednost protoka ($Q_{\max}$) ostvaruju se samo ako se zadovolji uslov dat u j-ni:

$$\frac{Q^2 B}{g A^3} = 1.$$

Lijeva strana j-ne = **Froudov broj (F_r)**

$$F_r = \frac{Q^2 B}{g A^3} = \frac{v^2}{g A/B} = \frac{v^2}{g h_{sr}}$$

$$h_{sr} = \frac{A}{B} \quad \text{srednja dubina}$$

• **Froudov broj = odnos između inercijalne sile i sile težine**

• $F_r = 1$ $\Rightarrow$ ostvaruje se kritična dubina

16

• F_r u angloameričkoj literaturi: $F_r = \frac{v}{\sqrt{g A/B}} = \frac{v}{\sqrt{g h_{sr}}}$

• **Kritičan pad u kanalu** $\Rightarrow$ ako je **normalna dubina = kritičnoj dubini**

• **Kritičan pad** $\Rightarrow$ tečenje u kanalu sa minimalnom specifičnom energijom

• Tečenje u kanalu $\Rightarrow$ **Shezy-Manningova j-na**: $Q = \frac{1}{n} A_k R_k^{2/3} I_k^{1/2}$, (A)

k – indeks koji označava da je strujanje sa kritičnom dubinom

• Iz uslova kritične dubine: $F_r = \frac{Q^2 B}{g A^3} = 1$,

odgovarajući hidraulički radijus: $R_k = A_k / O_k$

• Iz j-ne (A), **kritičan pad u kanalu** I_k :

$$I_k = \frac{n^2 g O_k^{4/3}}{B_k A_k^{1/3}} \quad (B)$$

• Kanali trougaonog i pravougaonog poprečnog presjeka: j-na (B) direktno se rješava

• Kanali trapeznog poprečnog presjeka: j-na (B) rješava se iterativno

17

5. BURNO I MIRNO TEČENJE

• Tečenje u otvorenim tokovima = f-ja Froudivog broja

• $F_r > 1$ **BURNO (SILOVITO) TEČENJE**

• $F_r < 1$ **MIRNO TEČENJE**

• **Burno tečenje** $\Rightarrow$ **inercijalne sile > sila težine i pritiska**

• **Mirno tečenje** $\Rightarrow$ **inercijalne sile < sila težine i pritiska**

• Brzina prostiranja (propagacije) gravitacionih ("malih") talasa (c) u otvorenom toku:

$$c = \sqrt{g h}, \quad \Rightarrow \quad \text{Froudiv broj: } F_r = \frac{v^2}{c^2}$$

• Froudiv broj iz prethodne j-ne:

odnos kvadrata v strujanja vode i kvadrata v prostiranja talasa

18

- Za prethodni slučaj:

a) $Fr > 1$ (burno tečenje) = v tečenja vode $>$ v prostiranja gravitacionih talasa.

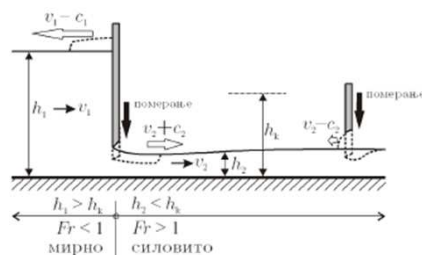
Uticaji (poremećaji) mogu se prostirati samo NIZVODNO

$$Fr = \frac{v^2}{c^2}$$

b) $Fr < 1$ (mirno tečenje) = v tečenja vode $<$ v prostiranja gravitacionih talasa.

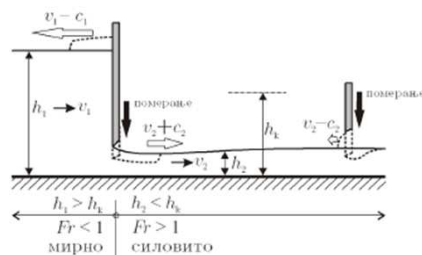
Uticaji (poremećaji) mogu se prostirati NIZVODNO i UZVODNO.

Primjer za prostiranje uticaja u otvorenom toku



Poprečni presjek otvorenog toka sa dvije ustave

19



-U kanalu postoje dvije ustave

-Uzvodna ustava toliko spuštена da je uzvodno od nje uspor sa mirnim tečenjem

-Nizvodno je tečenje burno

-Druga ustava iznad vode i ne utiče na strujanje (tečenje)

-Uzvodno od prve ustave (mirno tečenje) $Fr < 1$ важи: $v_1 < c_1$,

$$Fr = \frac{v^2}{c^2}$$

-Poremećaji se mogu prostirati **uzvodno i nizvodno**

-Ako se prva ustava spusti još naniže, tako izazvani talas može da se prostire uzvodno od ustave

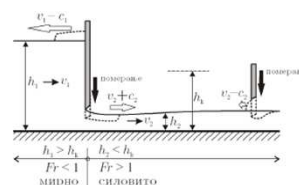
20

- Nizvodno od prve ustave (burno tečenje): $Fr > 1$ važi: $v_2 > c_2$
- Poremećaji mogu da se prostiru samo **nizvodno**
- Talas prouzrokovan pomjeranjem prve ustave može se prostirati nizvodno
- Ako se druga ustava spusti do površine burnog toka neposredno uzvodno od ustave formiraće se talas
- v prostiranja tog talasa $<$ od v strujanja vode $\Rightarrow$ talas se neće prostirati uzvodno

Odnosi hidrauličkih veličina u jednolikom tečenju:

$$Fr = \frac{v^2}{c^2}$$

	Силовито течење	Мирно течење
Fr број	$Fr > 1$	$Fr < 1$
Пад канала I_d	$I_d > I_k$	$I_d < I_k$
Нормална дубина h_n	$h_n < h_k$	$h_n > h_k$
Простирање поремећаја	низводно	низводно и узводно



21

6. NEJEDNOLIKO TEČENJE

- Nejednoliko tečenje u otvorenom toku: $\frac{\partial h}{\partial x} \neq 0$ $\frac{\partial v}{\partial x} \neq 0$,

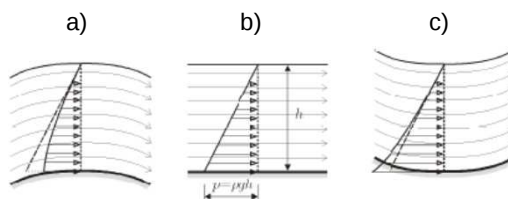
Brzina i dubina se mijenjaju duž toka

- **Uslovi za nastajanje nejednolikog tečenja:**

- Q je ustaljen ($\partial Q / \partial t = 0$)
- Korito vodotoka prizmatično sa jednakom hrapavošću okvašene površine ($\partial A / \partial x = 0$, $\partial n / \partial x = 0$)
- Nema lokalnih otpora
- Zakrivljenost strujnica je mala, važi hidrostatički zakon rasporeda pritiska po dubini

$$p = \rho g h$$

22



Strujanje u otvorenom toku: a) konveksne površine b) horizontalne površine c) konkavne površine

-Kod konkavne i konveksne površine, raspored pritiska je promjenjen u odnosu na ravnu (horizontalnu) površinu

23

6.1 Diferencijalna j-na za nejednoliko tečenje u prizmatičnom kanalu

- Prema definiciji, energija po jedinici težine (**E**) može da se definiše j-nom:

$$E = z + h + \frac{v^2}{2g} \quad (1)$$

- Diferenciranjem j-ne (1) duž toka (po **x** ili po **L**) dobijamo:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dh}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right) \quad (2)$$

- Iz definicije pada linije energije (**I_E**) i pada dna (**I_d**) imamo:

$$\frac{dE}{dx} = -I_E \quad (3)$$

$$\frac{dz}{dx} = -I_d \quad (4)$$

- Na desnoj strani j-na (3) i (4) uvedeni su znakovi “-” da bi padovi dna i energije bili pozitivni (u riječi “pad” podrazumijeva se negativan znak)

24

- Posljednji član u j-ni (2), uz pretpostavku da je ustaljeno tečenje ($\partial Q / \partial x = 0$), daje:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{Q^2}{2g A^2} \right) \\ &= \frac{Q^2}{2g} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{A^2} \right) = -\frac{Q^2}{g A^3} \frac{dA}{dx}. \end{aligned} \quad (5)$$

- Površina poprečnog presjeka $A=A(h,x)$ za nejednoliko tečenje

h – dubina vode

x - rastojanje

$$dA = \frac{\partial A}{\partial h} dh + \frac{\partial A}{\partial x} dx. \quad (6)$$

- Za prizmatično korito: $\partial A / \partial x = 0 \implies dA = B dh$ (7)

Kada u j-nu (5) unesemo (7) dobijamo:
$$\frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right) = -\frac{Q^2 B}{g A^3} \frac{dh}{dx}. \quad (8)$$

25

- Na osnovu j-na (3), (4) i (7) dobijamo:

$$\begin{aligned} -I_E &= -I_A + \frac{dh}{dx} - \frac{Q^2 B}{g A^3} \frac{dh}{dx} \\ I_A - I_E &= \frac{dh}{dx} \left(1 - \frac{Q^2 B}{g A^3} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Drugi član u zagradi = F_r broju $\implies$ j-na za nivo slobodne površine vode u kanalima sa nejednolikim strujanjem:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{I_A - I_E}{1 - F_r} \quad (10)$$

J-na (10) je obična difer j-na prvog reda, nelinearna, i u opštem slučaju nema analitičko rješenje $\implies$ rješenje tražimo numeričkim putem

Ova nelinearna difer j-na prvog reda mogla bi se rješavati u oba smjera

Oba smjera: uzvodno i nizvodno

26

- Zbog fizičkih i numeričkih problema važe pravila:

a) U mirnom tečenju ($Fr < 1$) smjer proračuna suprotan od smjera tečenja

b) U burnom tečenju ($Fr > 1$) smjer proračuna jednak smjeru tečenja

Jednoliko tečenje:

-pad linije energije, pad Π linije i kote dna su JEDNACI

$$I_E = I_{\Pi} = I_d = \frac{n^2 Q^2}{(A_n R_n^{2/3})^2}$$

A – površina poprečnog presjeka

R – hidraulički radijus

Nejednoliko tečenje:

-pad linije energije može se izraziti kao kod jednolikog tečenja, odnosno:

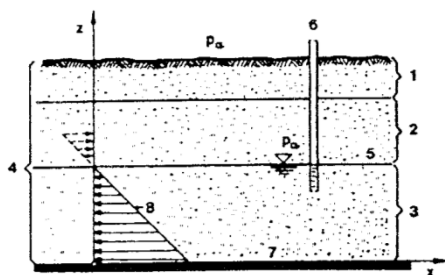
$$I_E = \frac{n^2 Q^2}{(A R^{2/3})^2}$$

27

FILTRACIJA PODZEMNIH VODA

- Strujanje **PV** u tlu od poroznog materijala (**S**, **G**, pukotinske stijene ...)
- Strujanje vode u zasićenoj poroznoj sredini = **FILTRACIJA (PROCJEĐIVANJE)**
- Geološka formacija u tlu koja sadrži adhezijsku, kapilarnu i gravitacijsku vodu = **VODONOSNI SLOJ**
- Ploha unutar vodonosnog sloja ($p=p_{atm}$) = **SLOBODNO VODNO LICE**
- To je ploha do koje bi se voda podigla u piježometru
- Voda pod silom teže se kroz pore u tlu spušta naniže (do vodonepropusnog sloja)
- Vodonepropusni sloj** = vrsta dna po kojem nastaje strujanje **PV**

28



PV u poroznom tlu: 1-adhezijska voda 2-kapilarna voda 3-gravitacijska voda 4-vodonosni sloj 5-vodno lice 6-pijezometar 7-vodonepropusni sloj 8-dijagram pritiska

•**Strujanje gravitacijske vode = podzemna voda**

•**Gravitacijska voda:** zasićena zona; p linearno raspodjeljen; ispod vodnog lica vlada predpritisk, a iznad podpritisk

•**Područje filtracije (procjeđivanja):** voda se procjeđuje kroz pore tla i dospije u podzemni tok

29

•Poroznost bitno utiče na strujanje PV

•**Poroznost:** a) apsolutna (geomehanička) poroznost

b) aktivna (efektivna) poroznost

-**Apsolutna poroznost (n_{ap})** = odnos V pora (V_p) prema ukupnoj V tla (V_t)

-Vrijednost koeficijenta poroznosti (n_{ap}) i (n_{ak}) uvijek < 1 i > 0

-Gravel ($n_{ap}=0,3$ do $0,4$) Sand ($n_{ap}=0,3$ do $0,45$)

•**HOMOGENO TLO:** filtracijske osobine tla iste u svim njegovim tačkama

•**IZOTROPNO TLO:** filtracijske osobine tla **NE** zavise od smjera strujanja PV

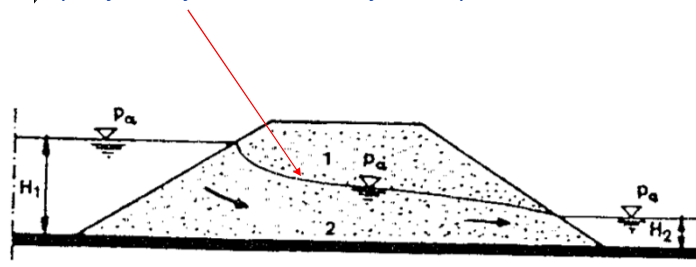
•Razmatrat ćemo da se filtracija odvija u homogenom i izotropnom tlu koje leži na ravnom (horizontalnom) vodonepropusnom sloju

30

•**GRAVITACIJSKI TOK (TOK SA SLOBODNOM POVRŠINOM):**

-Iznad podzemnog toka u poroznoj sredini nalazi se porozna sredina sa p_{atm} u porama

-Primjer $\Rightarrow$ procjeđivanje vode kroz zemljani nasip



Strujanje PV sa slobodnim vodnim licem

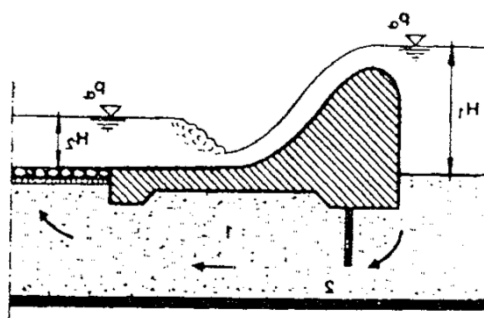
1 – porozni materijal 2 – vodonepropusni sloj

31

-Kada podzemni tok ulazi u vodonosni sloj koji je odozdo i odozgo ograničen vodonepropusnim slojem i pri tome popunjava sve pore vodonosnog sloja $\Rightarrow$

unutar vodonosnog sloja nastaje $p > p_{atm}$ $\Rightarrow$ strujanje PV pod p

Primjer $\Rightarrow$ procjeđivanje vode ispod temelja brane



Strujanje PV pod pritiskom

1 – porozni materijal 2 – vodonepropusni sloj

32

•**USTALJENO STRUJANJE PV:**

- filtracijski procesi se **NE** mijenjaju tokom vremena

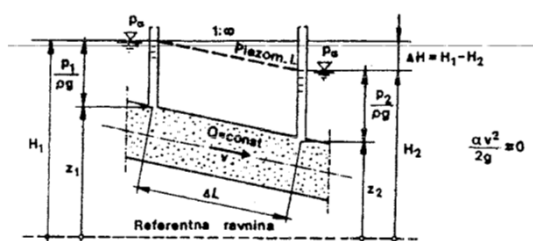
•**LAMINARNO STRUJANJE PV:**

- procjeđivanje kroz porozno tlo (npr. sitnozrni **G, S**) $\Rightarrow$ kroz pore voda se procjeđuje vrlo lagano $\Rightarrow$ pri malim vrijednostima R_e

33

1. ZAKON LAMINARNOG PROCJEĐIVANJA

- Zakon o laminarnom strujanju eksperimentima otkrio **Darcy**



Grafički prikaz hidrauličkih parametara pri laminarnom strujanju

- Darcy – zaključak:** pri dovoljno sporom strujanju v procjeđivanja direktno proporcionalna pijezometarskoj razlici ($\Delta H = H_1 - H_2$) tj. hidrauličkom gradijentu

$$I_E = I_O = - \frac{\Delta \bar{H}}{\Delta L}$$

34

odnosno:
$$v = \frac{Q}{A} = k I_o = -k \frac{\Delta H}{\Delta L} \quad (A)$$

Q – protok

A – proticajna površina kroz porozan materijal

ΔL – posmatrana dužina toka

H_1 – pijezometarska visina na ulazu posmatranog toka

H_2 – pijezometarska visina na izlazu posmatranog toka

k – koeficijent procjeđivanja

Predznak “ - ” zato što voda struji u smjeru u kojem Π visina opada

Brzina procjeđivanja v (iz (A)) = zamišljena v koju bi imala voda kada bi se procjeđivala **NE** samo kroz pore već kroz cijeli poprečni presjek filtarskog mat.

Iz (A): koeficijent procjeđivanja ima dimenziju v procjeđivanja pri hidrauličkom gradijentu = 1

35

• **k**: određuje se eksperimentalno (pomoću Darcy-evog pokusa)

• **k** = f-ja (promjene **t**, zbijenosti tla, sastava soli ...)

• Darcy-ev zakon (izraz (A)): v filtracije linearno proporcionalna hidrauličkom gradijentu $\Rightarrow$ samo za laminarno strujanje ($Re < 10$)

$$Re = \frac{v d}{\nu}$$

v – brzina procjeđivanja (m/s)

d – srednji prečnik zrna filtarskog materijala

ν – kinematski koeficijent viskoznosti (f-ja temperature vode) (m²/s)

Vrsta tla	Srednja vrijednost koeficijenta procjeđivanja k [cm s ⁻¹]
Glina	(1 do 6) 10^{-6}
Glinovito tlo	(1 do 6) 10^{-5}
Pješčano gusto tlo	(1 do 6) 10^{-4}
Pješčano rahlo tlo	(1 do 6) 10^{-3}
Sitnozrnati pijesak	(1 do 6) 10^{-3}
Krupnozrnati pijesak	(1 do 6) 10^{-2}

Srednje vrijednosti koeficijenta procjeđivanja

36

- Darcy-ev zakon na slučaj prostornog strujanja (tri komponente $\mathbf{v}$ procjeđivanja):

$$v_x = -k \frac{\partial H}{\partial x} ; \quad v_y = -k \frac{\partial H}{\partial y} ; \quad v_z = -k \frac{\partial H}{\partial z} \quad (\text{B})$$

$$\vec{v} = \frac{\partial(-kH)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial(-kH)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial(-kH)}{\partial z} \vec{k} = \text{grad}(-kH) = \text{grad } \Phi \quad (\text{C})$$

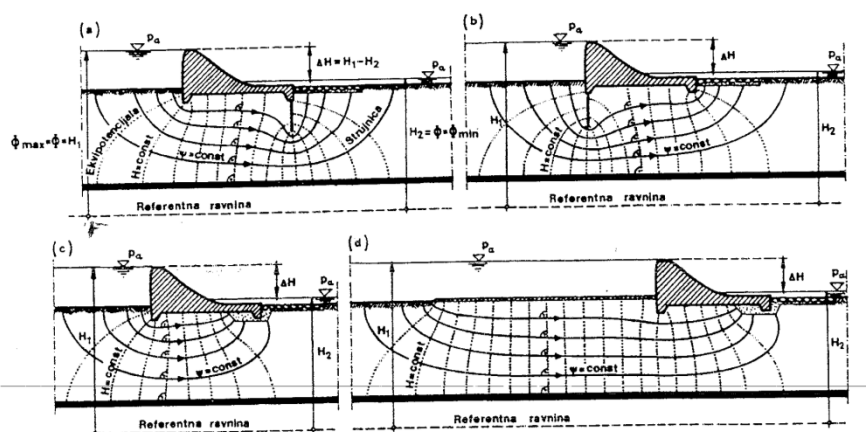
- Teorija potencijalnog strujanja koristi se i za proračun procjeđivanja ispod **HG**

- Npr. ispod brana postoje tokovi **PV** sa hor. i vert. komponentama $\mathbf{v}$

- U praksi: proračun približnim rješenjem

- numerički postupci
- grafički postupci
- postupak elektroanalogije

37



Primjeri potencijalnog strujanja (procjeđivanja) ispod temelja betonskih brana

38

-Slika ravanskog potencijalnog strujanja prikazuje se **STRUJNOM MREŽOM**

-Strujna mreža = **dvije međusobno ortogonalne familije krivulja Φ i Ψ**

-Svaka kriva Φ_i = geometrijsko mjesto tačaka jednakog pritiska (potencijala)

$$H_i = z_i + p_i/\rho g.$$

-Geometrijski oblik strujne mreže: f-ja granica filtracionog toka

-Geometrijski oblik strujne mreže: **NE** zavisi od **k** niti od **p**

-Znajući strujnu mrežu proračun filtracije relativno jednostavan

•Jednostavniji slučajevi u praksi:

- kada strujanje **PV** možemo smatrati horizontalno u većem dijelu toka 

izrazi na osnovu j-ne Dupuita:
$$v = -k \frac{dH}{dl} = k I_o \quad (D)$$

I_o – pad slobodnog vodnog lica koji se mijenja samo duž toka

H – pijezometarska visina tačaka u presjeku toka

l - udaljenost

39

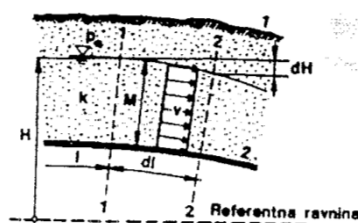
-Izraz (D) važi samo uz **pretpostavku postepenog promjenjivog strujanja PV** kada je **hidraulički gradijent za cijeli presjek toka const.** te su i lokalne **v** filtracije u svim tačkama toka const.

-**Zaključak:** dijagram **v** oblika pravougaonika (razlika od otvorenih tokova)

$$v = -k \frac{dH}{dl} = k I_o \quad (D)$$

-**Dupuitova postavka:**

ekvipotencijale praktično vertikalne tj. **H** visina stalna u cijelom presjeku toka



Grafički prikaz Dupuitove postavke

1 – površina terena 2 – vodonepropusni sloj 1-1 i 2-2 oznake presjeka

40

- **Dupuitova postavka:**

kao i kod Darcy-evog zakona treba srednju v procjeđivanja shvatiti kao neku zamišljenu v kod koje kroz cijeli presjek toka protiče protok Q

Hidraulička teorija procjeđivanja:

zasniva se na horizontalnost i const. v procjeđivanja u nekom presjeku toka **PV**

-Prema hidrauličkoj teoriji:

jednostavno se može izraziti protok q pomoću gradijenta Π plohe na slobodnom vodnom licu:

$$q = vM = -kM \frac{dH}{dl} \quad (E)$$

M (m) = visina proticajnog presjeka

Izrazi (D) i (E) imaju temeljnu važnost $\Rightarrow$ jednostavan proračun strujanja **PV**

41

2. STRUJANJE PODZEMNE VODE PREMA VODOZAHVATIMA

- Hidraulički proračun: Dupuit-ova postavka i [analiza stacionarnog strujanja](#)
- Uslov za prethodno: količina crpljenja u ravnoteži sa dotokom

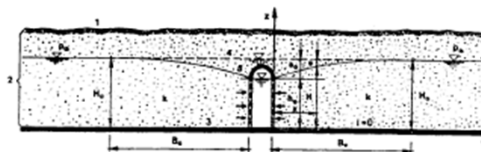
•**Najčešći vodozahvati:**

- a) galerije
- b) bunari

42

2.1 Strujanje PV prema galerijama

- Razmatramo horizontalnu galeriju pravougaonog presjeka
- Dno galerije na ravnom vodonepropusnom sloju ($I=0$)



Strujanje PV prema galeriji: 1 – površina terena 2 – vodonosni sloj
3 – vodonepropusni sloj 4 – statički nivo PV 5 – dinamički nivo PV

H_0 – dubina toka PV u vodonosnom sloju

h_0 – dubina vode u galerijskom vodozahvatu

$s = H_0 - h_0$ – sniženje nivoa PV u galeriji (= izdašnost galerije = količ. crpljenja vode)

B_0 – širina uticaja galerije tj. L na kojoj se ne osjeća sniženje NPV u odnosu prije crpljenja

43

- U ovom slučaju nastaje **nejednoliko horizontalno strujanje PV** sa slobodnim licem
- Dolazi do postepene promjene strujanja **PV**
- Dotok vode u galeriju (slučaj dvostrukog prihranjivanja):

$$Q = 2qL_g = 2kL_g H \frac{dH}{dx} \quad (1)$$

L_g – L galerijskog vodozahvata

U (1) uzet + predznak hidrauličkog gradijenta (sa porastom H raste i x)

Izdvajanjem varijabli imamo:

$$Q dx = 2kL_g H dH \quad (2)$$

Na kraju se dobija:

$$Q = kL_g \frac{H_o^2 - h_o^2}{B_o} \quad (3)$$

44

- Kod jednostranog prihranjivanja galerije izraz (3) prelazi u slijedeći oblik:

$$Q = kL_s \frac{H_s^2 - h_s^2}{2B_s} \quad (4)$$

- **Određivanje izdašnosti galerije:** bitna i širina uticaja galerije (B_o)
- B_o najpouzdanije se određuje eksperimentalno
- Za preliminarne proračune B_o iz slijedeće tabele (podaci iz prakse):

Vrsta tla	Širina utjecaja galerije B_s [m]
Sitnozrnati pijesak	25 do 100
Srednji do krupnozrnati pijesak	100 do 500
Sitnozrnati do srednji šljunak	500 do 1 500

Orijentacione vrijednosti širine uticaja galerije

45

2.2 Strujanje PV prema bunarima

- **Podjela prema:**

- a) vrsti strujanja
 - a1 – bunari sa slobodnim vodnim licem
 - a2 – bunari pod pritiskom
- b) dubini prorupčanog dijela bunara
 - b1 – potpuni bunari (savršeni)
 - b2 – nepotpuni bunari (nesavršeni)

- Bunar u strujanju sa slobodnim vodnim licem = OBIČNI BUNAR

46

Arteški bunar:

- a) Vodonosni sloj između vodonepropusne podloge i prekriven vodonepropusnim slojem
- b) **PV** u vodonosnom sloju pod $p > p_{atm}$
- c) Bušenje bunara: kroz gornji vodonepropusni sloj i kroz vodonosni sloj dolazi do izbijanja **PV** iznad terena

Subarteški bunar:

- a) i b) isto kao arteški bunar
- c) Bušenje bunara: **NV** u bunaru se podigne iznad vodonosnog sloja, ali ispod površine terena

Potpun bunar:

Prorupčani (filtarski) dio bunara prolazi kroz cijeli vodonosni sloj sve do vodonepropusnog sloja

Nepotpun bunar:

Filtarski dio ne prolazi do vodonepropusnog sloja

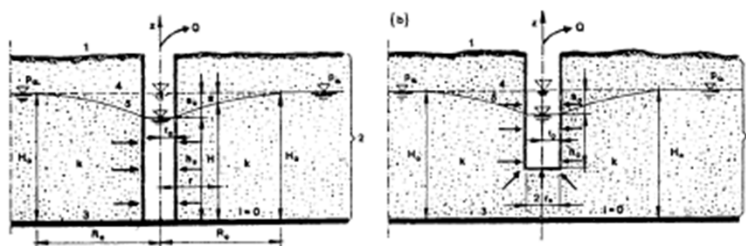
47

Strujanje PV prema običnom bunaru:a) Potpuni obični bunar

- Slične ili iste oznake kao kod dotoka u galerijski vodozahvat
- H_o = dubina PV u vodonosnom sloju
- h_o = dubina vode u bunaru
- $s_o = H_o \times h_o$ (sniženje NPV u bunaru)
- R_o = radijus uticaja bunara (radijus dokle se ne osjeća sniženje NPV)
- r_o = unutarjni r bunara
- r = udaljenost kod koje je veličina sniženja s
- H = dubina vode

• Crpljenje vode $\Rightarrow$ sniženje **NPV** u bunaru i njegovoj okolini $\Rightarrow$ formira se lijevak slobodne površine

48



Strujanje PV prema običnom bunaru

a) Potpun bunar

b) Nepotpun bunar

1 – teren 2 – vodonosni sloj

3 – vodonepropusni sloj

4 – statički NPV

5 – depresijska ploha

$$Q = \pi k \frac{H_o^2 - h_o^2}{\ln \frac{R_o}{r_o}}$$

Potpun obični bunar: [nelinearna veza između dotoka Q i sniženja s](#)

49

b) Nepotpun običan bunar-Ne važi Dupuitova postavka ➡ [strujanje sa izrazitom vert. komponentom v](#)

-Koriste se u praksi gotove formule (npr. formula Girinskog 1950. godine)

$$Q = \frac{\pi k (2h_o - s_o) s_o}{\ln \frac{2h_o - s_o}{1.2r_o}}$$

50

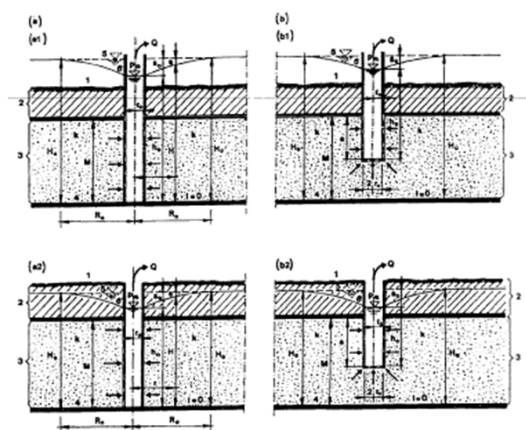
Strujanje PV prema arteškom i subarteškom bunaru:

- Dotok prema potpunom arteškom i subarteškom bunaru
- Dotok prema nepotpunom arteškom i subarteškom bunaru

a) Dotok prema potpunom arteškom ili potpunom subarteškom bunaru

- Nova oznaka M (m) = d sloja PV pod p
- Ostale oznake isto značenje kao u prethodnim analizama
- H_0 = poprima značenje visine koja odgovara p PV u vodonosnom sloju

51



Strujanje PV prema arteškom i subarteškom bunaru

a) Potpun bunar

b) Nepotpun bunar

a1) b1) arteški bunar

a2) b2) subarteški bunar

1 – površina terena

2 – vodonepropusni krovinski sloj

3 – vodonosni sloj

4 – vodonepropusni sloj

5 – statički NPV

6 – depresijska ploha

52

- Dotok prema bunaru: $Q = 2\pi r q = 2\pi k r M \frac{dH}{dr}$

$$Q = 2\pi k M \frac{H_o - h_s}{\ln \frac{R_o}{r_o}} = 2\pi k M \frac{s_o}{\ln \frac{R_o}{r_o}}$$

Linearan odnos između dotoka Q i sniženja s_o

b) Dotok prema nepotpunom arteškom ili nepotpunom subarteškom bunaru

-Ne važi Dupuitova postavka

-Za proračun: formula Babuškina (1950. god.): $Q = \frac{2\pi k a s_o}{\ln \frac{1.26}{r_o}}$

a (m) = dubina uronjenja prorupčanog dijela bunara u vodonosnom sloju

53

Zaključak:

-Prethodni izrazi važe za proračun Q samo prema jednom bunaru

-Bunari u strujanju pod p : sniženje **NPV** linearno proporcionalno sa Q

-Bunari u strujanju sa slobodnim vodnim licem: prethodna veza nelinearna

-Prethodno bitno za proračun Q prema grupi bunara

-Grupa bunara:

linearna zavisnost Q i sniženja **NPV** $\Rightarrow$ načelo superpozicije

(sniženje u okolini bunara = zbiru sniženja pri pojedinačnom crpljenju bunara)

Nelinearna zavisnost $\Rightarrow$ postupak proračuna znatno složeniji

54