



HIDROMEHANIKA

Prof. dr. sc. NEDIM SULJIĆ, dipl.ing.građ.

1

HIDROSTATIKA

•Fluid $\Rightarrow$ dejstvo malog tangencijalnog napona $\Rightarrow$ neprekidno se deformiše

fluid koji miruje $\Rightarrow$ postoje samo normalne sile pritiska

•Relativno mirovanje $\Rightarrow$ nema deformacija čestica fluida $\Rightarrow$ nema tang. napona

•Fluid u mirovanju $\Rightarrow$ vanjske masene i površinske sile p u ravnoteži

•HIDROSTATIKA $\Rightarrow$ proučava zakone mirovanja tj. ravnoteže tečnosti

•Tečnost u ravnoteži: uticaj vanjskih sila (sila teže i sila inercije)

•Vanjske sile su oblici zapreminskih sila

•Površinske sile: atmosferski pritisak (djeluje u otvorenim posudama i tokovima)

2

Sile u tečnosti u mirovanju

•Zamislamo elementarnu V tečnosti

•Elementarna V tečnosti okružena tečnosti koji na njega djeluju površinskim silama

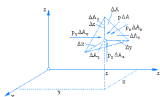
•Na elementarnu V tečnosti djeluju i zapreminske sile

•Odnosi površinskih i zapreminskih sila $\Rightarrow$ kretanje ili mirovanje elem. V tečnosti

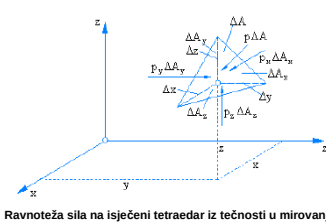
•Površinske sile (opšti slučaj) $\Rightarrow$ tangencijalne i normalne sile

hidrostatski stanje ravnoteže i kretanje idealne tečnosti $\Rightarrow$ samo normalne sile
normalne sile su u vidu tlačnih sila

sile zatezanja u unutrašnjosti tečnosti i gasova se ne mogu prenositi



3



ΔA – površina na elem. V tečnosti

ΔF_p – tlačna sila koja djeluje na ΔA

izraz za pritisak ($Pa = N/m^2$)

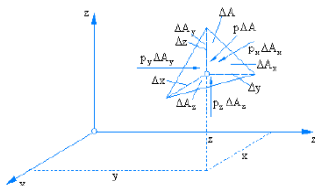
$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_p}{\Delta A} = \frac{dF_p}{dA} > 0$$

Ravnoteža sila na isječenom tetraedar iz tečnosti u mirovanju

-Intenzitet djelovanja p ne zavisi od smjera $\Rightarrow p$ u tački u svim smjerovima je isti

kod naprezanja čvrstih tijela u stanju mirovanja to nije slučaj (teorija elastičnosti)

4

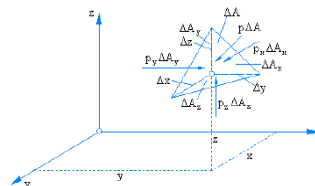


- $\mathbf{p}$ u x, y, z smjeru $\Rightarrow p_x, p_y, p_z$
- $\mathbf{p}$ upravan na kosu stranu tetraedra označimo sa $\mathbf{p}$
- površine na koje djeluju p_x, p_y, p_z i $\mathbf{p}$ imaju oznake $\Delta A_x, \Delta A_y, \Delta A_z$ i ΔA

tlačne sile na njih su proporcionalne veličinama

- na tetraedar djelujuća masena sila (sila teže) je $\mathbf{V}$ sila $\Rightarrow$ po iznosu proporcionalna $\mathbf{V}$

5

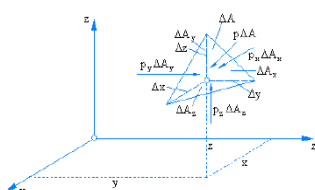


- površinske sile i bez $\mathbf{V}$ sile moraju zadovoljiti uslove ravnoteže
- uvedemo oznake $\lambda, \beta, \gamma \Rightarrow$ uglovi između osa x, y, z i normala na površinu ΔA

važe slijedeći odnosi:

$$\Delta A_x = \Delta A \cos \lambda, \quad \Delta A_y = \Delta A \cos \beta, \quad \Delta A_z = \Delta A \cos \gamma \quad (1)$$

6



- Za uslove (1) imamo uslove ravnoteže za površinske sile $\mathbf{p}$ na tetraedar u x, y, z :

$$p_x \Delta A_x - p \Delta A \cos \alpha = 0; \quad p_y \Delta A_y - p \Delta A \cos \beta = 0; \quad p_z \Delta A_z - p \Delta A \cos \gamma = 0 \quad (2)$$

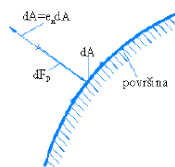
- Uvrštavanjem izraza (1) u uslove ravnoteže (2) $\Rightarrow$ PASCAL-ov zakon:

$$p_x = p_y = p_z = p$$

7

- Pascalov zakon dokazuje tvrdnju $\Rightarrow \mathbf{p}$ u tački skalarna veličina neovisna o smjeru

$\mathbf{p}$ = kontinualno derivabilna f-ja prostora $\Rightarrow$ pojam polja $\mathbf{p}$
polje $\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{r})$



Djelujuća sila $\mathbf{p}$ $d\mathbf{F}_p$ okomito na površinu dA

- Sila $\mathbf{p}$ $d\mathbf{F}_p$ $\Rightarrow$ okomita na $dA \Rightarrow$ vektor

vektorska veličina = $\mathbf{p} dA$

$$d\mathbf{F}_p = -p dA, \quad \mathbf{F}_p = - \int_{(A)} p dA$$

8

HIDROSTATIČKI PRITISAK

- **Definicija:** pod uticajem vanjskih sila unutar tečnosti nastaje stišljivo naprezanje
- Jedinica mjere: N/m^2

$$p = F / A \quad (\text{N/m}^2 = \text{Pa})$$

- Pritisak od **1 Pa** je veoma mali (u praksi koristimo veće jedinice)
- Koristimo jedinicu "**bar**" (**1 bar = 10^5 Pa = 10^2 kPa = 0,1 MPa**)

- Zakonitost mirovanja fluida $\Rightarrow$ najstarija saznanja mehanike fluida.

- U stanju mirovanja fluida postavlja se zadatak utvrđivanja međusobnog uticaja tri osnovne veličine:

- pritiska **p**
- gustine **ρ** i
- spoljnih sila **F** koje deluju na fluid.

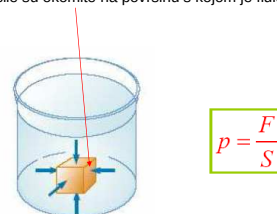
9

- Unutrašnje sile u fluidu iskazuju se pritiskom (**p**).

- **Pritisak** $\Rightarrow$ skalarna veličina i iskazuje dejstvo sile po jedinici površine.

- Spoljne sile: posljedica okruženja fluida (po jedinici mase fluida)

- U fluidu u mirovanju sile su okomite na površinu s kojom je fluid u kontaktu $\rightarrow$ **sile pritiska**.



10

- Pritisak $\Rightarrow$ skalarna veličina

- **Pritisak** $\Rightarrow$ javlja se kod ravnoteže fluidnih masa (u mirovanju ili kretanju)

HIDROSTATIČKI PRITISAK

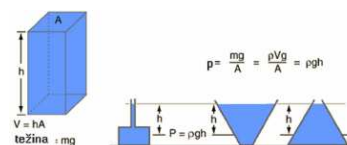
- **Hidrostatički pritisak** $\Rightarrow$ dvije osobine:

- sila **p** uvijek normalna na površinu na koju djeluje
- veličina **p** jednaka u svim smjerovima

primjer $\Rightarrow$ riba izložena hidrostatičkom **p** sa svih strana

11

- **Hidrostatički p** $\Rightarrow$ definisati preko masene **V** (slika dole)

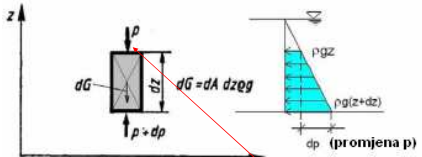


- Zaključujemo $\Rightarrow$ **zakon promjene hidrostatičkog p odvija se po dubini (h)**

razmatramo nestlačivi fluid (objašnjenje zaključka)

naredni slajd

12



Na površinu elementarne čestice fluida dA djeluju p

Za $dz \Rightarrow$ pritisak $p+dp$

Ako je dG težina čestice $\Rightarrow$ **ravnoteža sila u vertikalnom smjeru:**

$$dAp + dG = dA(p + dp)$$

odnosno za konačne veličine dobijamo:

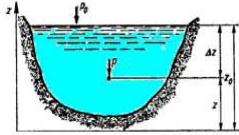
$$dAp + dA dz \rho g = dAp + dA dp$$

$$\cancel{dAp} + dA dz \rho g = \cancel{dAp} + dA dp$$

$$\cancel{dA} dz \rho g = \cancel{dA} dp$$

$$\rho g dz = dp$$

13



Mjerno p na razlici dubine Δz

Oni (p) se razlikuju za $\Delta p = p_2 - p_1$

Neki p_2 možemo izraziti pomoću poznatog p_1 :

$$p_2 = p_1 + \rho g \Delta z$$

Poznat pritisak $p_1 = p_0 \Rightarrow p$ na površini tečnosti $\Rightarrow$ hidrostatski p u fluidu:

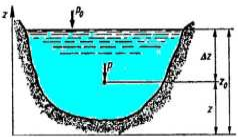
$$p = p_0 + \rho g \Delta z \quad (A)$$

Izraz (A) $\Rightarrow$ koji p vlada u fluidu na dubini Δz od površine

na površini djeluje pritisak p_0 (npr. atmosferski p)

p = apsolutni p na tom mjestu

14



Obično označimo dubinu od površine:

$$\Delta z = h$$

izraz (A) prelazi u oblik:

$$p = p_0 + \rho g h$$

$p_0 \Rightarrow$ atmosferski $p \Rightarrow p$ u tečnosti odredimo iz izraza: $p = \rho g h$ (B)

Izraz (B) $\Rightarrow$ možemo odrediti p visinom stupca fluida: $h = p / \rho g$ (C)

Izraz (C) odnosno veličina " h " $\Rightarrow$ **VISINA p (TLAČNA ILI II VISINA)**

$p \Rightarrow$ jedinica Pa (odnos F i A) $\Rightarrow 1 \text{ Pa} = \text{N/m}^2$

Na dubini $h=1,2 \text{ m}$ od površine vode $\Rightarrow$ hidrostatski p iznosi:

$$p = \rho g h = 1000 * 9,81 * 1,2 = 11772 \text{ Pa}$$

15

$p = \rho g h = 1000 * 9,81 * 1,2 = 11772 \text{ Pa}$

Hidrostatski p možemo izraziti visinom stupca vode, žive ili alkohola:

$h_1 = p / \rho_1 g = 11772 / 1000 * 9,81 = 1,2 \text{ m} = 1200 \text{ mm}$ stupca vode, ili stupcem žive

$h_2 = p / \rho_2 g = 11772 / 13600 * 9,81 = 0,088 \text{ m} = 88 \text{ mm}$ stupca žive, ili stupcem alkohola

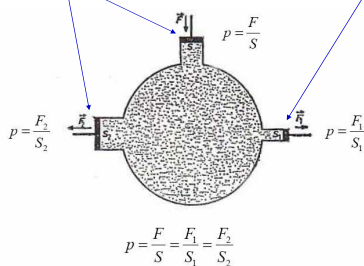
$h_3 = p / \rho_3 g = 11772 / 780 * 9,81 = 1,51 \text{ m} = 1510 \text{ mm}$ stupca alkohola.

16

Pascalov zakon

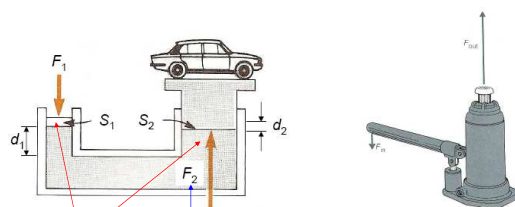
•Pascalov zakon:

u svakoj tački mirnog, nestlačivog fluida pritisak je jednak.



17

Pascalov zakon → princip rada hidrauličkih uređaja (dizalica, kočnice, ...)



$$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

$$F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1}$$

Sila F_2 veća je od F_1 jer je S_2 veće od S_1 .

$$S_1 d_1 = S_2 d_2, \quad F_1 d_1 = F_2 d_2$$

18

OJLEROVA JEDNAČINA ZA MIRAN FLUID

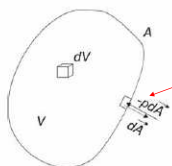
•Zadatak statike fluida: utvrditi uslove mirovanja svih djelića u određenom fluidu.

•Kao i u mehanici čvrstih tijela: treba naći uslov ravnoteže svih sila koje deluju na fluid.

•Posmatra se proizvoljna fluidna V (sl. dole) koja je sastavni dio ukupne V fluida.

•Na svaki elementarni fluidni djelić zapremine dV djeluje spoljna sila $\rho \vec{F} dV$.

•Ukupna spoljna sila u uočenoj fluidnoj zapremini iznosi: $\int_V \rho \vec{F} dV$



19

•Unutrašnja sila na fluidnoj zapremini djeluje po njenim granicama jer se dejstvo pritiska između elementarnih fluidnih djelića dV potire.

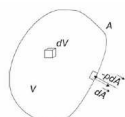
•Unutrašnja sila na uočenu fluidnu zapreminu djeluje po omotaču te zapremine.

•Elementarna sila djeluje na elementarnu površinu i ona iznosi $p d\vec{A}$.

•Znak minus potiče od suprotnog usmjerenja sile u odnosu na jedinični vektor površine.

•Ukupna sila na cijeloj površini uočene fluidne zapremine iznosi: $-\int_A p d\vec{A}$

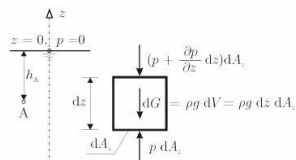
•Uslov ravnoteže fluida: zbir svih sila koje djeluju na uočenu fluidnu $V = 0$



$$\int_V \rho \vec{F} dV - \int_A p d\vec{A} = 0$$

20

OSNOVNA JEDNAČINA MIROVANJA TEČNOSTI



Sile na elementarnu V (dV) fluida koji miruje

- Pretpostavke za izvođenje:

- 1) Gustina fluida const. ($\rho = \text{const}$)
- 2) Težina G jedina zapreminska sila
- 3) Djeluje samo pritisak (p), a smičićih napona nema

21

- Dinamička j-na za elementarnu V fluida (za smjer z-ose):

$$p dA_z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) dA_z - \rho g dz dA_z = 0, \quad (1)$$

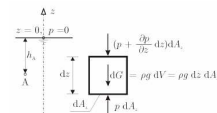
$\rho g dz dA_z$ težina elementarne V tečnosti (zapreminska sila)

$p dA_z - [p + (\partial p / \partial z) dz] dA_z$ površinske sile na gornjoj i donjoj površini elem. V

- Iz j-ne (1) dobijamo: $\frac{\partial p}{\partial z} dz dA_z + \rho g dz dA_z = 0$

- Dijeljenjem sa $dz dA_z$ imamo:

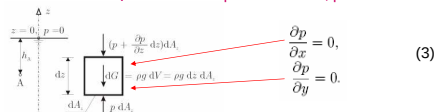
$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0. \quad (2)$$



22

- Dinamičke j-ne možemo napisati i za ose x i y (ortogonalne ose u horiz. ravni).

- U horizontalnoj ravni nema zapreminskih sila, pa su dinamičke j-ne:



$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

- Iz j-na (3) vidimo da se p ne mijenja u horiz. ravni

- J-na (2) transformiše se u običnu diferencijalnu j-nu: $\frac{dp}{dz} + \rho g = 0$.

- Ova j-na se može napisati u obliku: $\frac{dp}{\rho g} + dz = 0$,

- Nakon integrisanja dobijemo osnovnu j-nu hidrostatike:

$$\frac{p}{\rho g} + z = \text{const}. \quad (4)$$

23

$$p/\rho g + z = \Pi$$

Π = pijezometarska visina

Π = zbir geometrijske visine posmatrane tačke u odnosu na referentnu ravan (z) i visine hidrostatičkog pritiska u istoj tački ($p/\rho g$)

- Pijezometri (pijezometarske cijevi):

mjerjenje visine kroz koju se izražava hidrostatički pritisak tečnosti ($p/\rho g$)

- Pijezometarske cijevi:

staklene (obično) cijevi otvorene na vrhu (npr. spojene sa rezervoarima ili cijevima)

24

•U nekoj tački **A** (prema j-ni (4)) pritisak iznosi: $p_A = -\rho g z_A$

•Dubina tečnosti h_A je jednaka z_A : $h_A = -z_A$

•Pritisak u tački **A**:

$$p_A = \rho g h_A.$$

• Osnovna j-na hidrostatike: možemo posmatrati i kroz zakon održanja energije, tj:

Π = potencijalna energija jedinice težine tečnosti i sastoji se od:

- 1) Energije položaja jedinice težine tečnosti (z)
- 2) Energije hidrostatskog pritiska jedinice težine tečnosti ($p/\rho g$)

• Na osnovu j-ne hidrostatike:

Π svake tačke u tečnosti (u spojenom sistemu u stanju mirovanja) = const.

25

REZIME – OSNOVNI POJMOVI I PRAVILA HIDROSTATIKE

•**Hidrostatika** se bavi ponašanjem tečnosti u stanju mirovanja.

•Tečnosti uvijek zauzimaju oblik suda u kome se nalaze i ne trpe napone na smicanje.

•Dejstvo tečnosti na zid suda uvek mora biti normalno na njegovu površinu.

•Slobodna površina tečnosti uvijek je upravna na rezultantnu silu koja na nju djeluje.

•Ako na tečnost, u sudu, djeluje samo gravitaciona sila $\Rightarrow$ slobodna površina tečnosti je u horizontalnom položaju.

Pascalov zakon:

U izolovanoj tečnosti, pritisak se podjednako prenosi u svim pravcima.

Ovaj pritisak se naziva **hidrostatski pritisak**.

26

U proučavanju stanja tečnosti, polazi se od slijedećih činjenica:

- 1) tečnost je nestišljiva (tačnije, gotovo nestišljiva);
- 2) tečnost uvijek poprima oblik suda u kome se nalazi;
- 3) spoljašnja sila uvijek djeluje normalno na slobodnu površinu tečnosti, (naprimjer, sila teže).

Zakon o hidrostatskom pritisku:

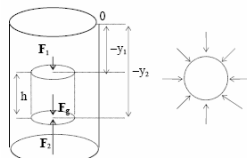
Pritisak fluida koji miruje u polju sile teže, zove se **hidrostatski pritisak** i dat je izrazom:

$$p_2 - p_1 = \rho g(y_1 - y_2) = \rho gh$$

p_2 je pritisak na nivou y_2

p_1 je pritisak nivou y_1

$F_g = mg$ je sila teže



27

Hidrostatski pritisak na dnu suda zavisi samo od visine vertikalnog stuba tečnosti, a ne i od oblika suda (slika dole).



Slika A: Hidrostatski pritisak je isti na dnu za sva tri suda

POTISAK KOD TEČNOSTI:

-Sila kojom tečnosti deluju na tijela potopljena u njih naziva se **silom potiska**.

-Po intezitetu **sila potiska je jednaka težini tijelom istisnute tečnosti**.

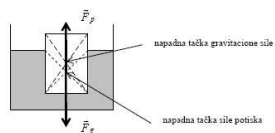
-Napadna tačka sile potiska nalazi se u težištu potopljenog dijela tijela.

-Za **homogena i simetrična tijela** napadna tačka je u centru simetrije.

-Smjer dejstva je nasuprot smjera gravitacione sile.

-Ukoliko je gustina tijela veća od gustine tečnosti **tijelo tone**, ako je manja **tijelo pliva**, a ako su gustine iste **tijelo je u ravnoteži i ostaje u mjestu na kom se postavi**.

28



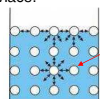
$$F_p = \rho V_p g$$

ρ i V_p gustina tečnosti i zapremina potopljenog dijela tijela.

POVRŠINSKI NAPON:

-Molekuli u tečnostima, koje nisu izložene dejstvu spoljašnjih sila, nalaze se u okruženju istosrodnih molekula na nekom ravnotežnom rastojanju.

-Ukoliko tečnost sabijamo molekuli dolaze na rastojanja manja od ravnotežnog i među molekulama se javljaju odbojne međumolekulske sile koje su reda veličine 10^{38} puta većeg inteziteta od gravitacione sile kojom se privlače.

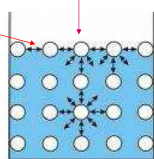


29

-Spontana težnja, u prirodi, za minimumom potencijalne energije usloviće da slobodna površina tečnosti ima minimalnu vrijednost.

-Kap vode teži sfernom obliku, jer od svih tijela iste zapremine sfera ima najmanju površinu.

-Ovaj efekat smanjivanja granične površine javlja se između bilo koja dva fluida i naziva se površinski napon.



Međumolekularne sile

kohezione sile
(između istovrhnih molekula)

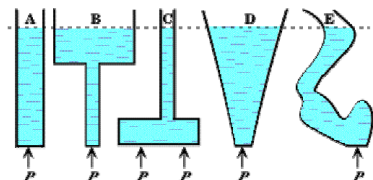
adhezione sile
(između različitih molekule)

30

HIDROSTATSKI PARADOKS:

PITANJE:

Ako je visina stupca fluida jednaka u svim posudama, u kojoj posudi je pritisak fluida na dno posude najveći? Količina fluida u svakoj posudi ne mora biti nužno jednaka!

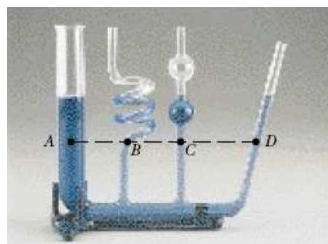


Pritisak p je jednak na dno svake posude !!!

31

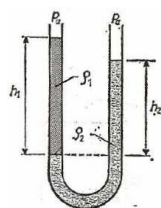
ZAKON SPOJENIH POSUDA:

Koliki je pritisak u tačkama A, B, C, D?



U međusobno spojenim posudama nivo tečnosti u svim posudama je isti bez obzira na oblik posude $\Rightarrow$ hidrostatički pritisak jednak u svim tačkama na jednakoj dubini.

32



Imamo dvije različite tečnosti: ρ_1 i ρ_2

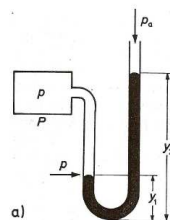
$$p_a + \rho_1 g h_1 = p_a + \rho_2 g h_2$$

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{h_1}{h_2}$$

- Prema principu spojenih posuda rade uređaji za mjerenje pritiska
- Uređaji za mjerenje pritiska: **manometri, barometri (tlakomjeri)**

33

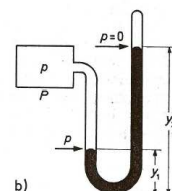
NAČELO RADA MANOMETRA (korištenje zakona za hidrostatski pritisak):



a)

Otvoreni manometar :

$$p = p_a + \rho g (y_2 - y_1) = p_a + \rho g h$$



b)

Zatvoreni manometar :

$$p = \rho g (y_2 - y_1) = \rho g h$$

34

VRSTE PRITISAKA

1. Apsolutni pritisak p:

Ukupni pritisak u nekoj tački fluidnog prostora.

2. Atmosferski pritisak p_a :

Pritisak koji vlada u okolnom vazduhu.

Pri normalnim termodinamičkim uslovima uzima se da on iznosi $p_a = 101325 \text{ Pa}$.

3. Nadpritisak ili manometarski pritisak p_m :

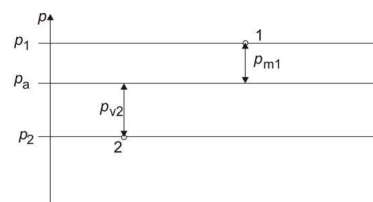
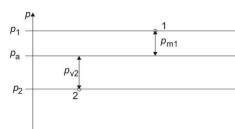
Razlika između apsolutnog pritiska i atmosferskog pritiska, ako je apsolutni pritisak veći od atmosferskog:

$$p_m = p - p_a$$

4. Podpritisak ili vakumetski pritisak:

Razlika između atmosferskog pritiska i apsolutnog pritiska, ako je atmosferski pritisak veći od apsolutnog.

$$p_v = p_a - p$$



Definicija nadpritiska i podpritiska

35

36

OSOBE HIDROSTATIČKOG PRITISKA (ponavljamo – VEOMA BITNO):

- Dvije osnovne osobine:

- 1) Sila je uvijek normalna na površinu na koju djeluje
- 2) U datoj tački pritisak djeluje podjednako u svim pravcima

MJERENJE PRITISKA:

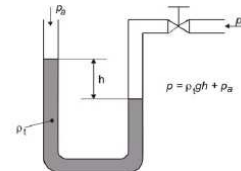
Apsolutni pritisak (p^{aps}) je jednak zbiru pritiska (p) i atmosferskog pritiska (p^{atm}), prema:

$$p^{aps} = p + p^{atm}.$$

- Apsolutni pritisak je uvek pozitivan.
- Atmosferski, ili barometarski pritisak: posljedica postojanja atmosfere.
- Njegova veličina zavisi od meteoroloških uslova i nadmorske visine (uvijek +)
- Normalni atmosferski pritisak na morskoj površini je oko 1,014 bar.
- Za mjerenje atmosferskog pritiska koriste se barometri.

37

- Pritisak se mjeri na različite načine (f-ja vrste fluida i veličine pritiska).
- Najjednostavniji i pouzdan način mjerenja malih nadpritisaka i podpritisaka je pomoću U – cijevi.

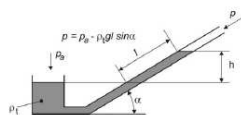


Mjerenje pritiska pomoću U - cijevi

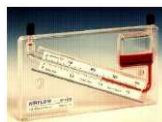
38

- Za preciznija mjerenja veoma malih nadpritisaka i podpritisaka koristi se mikromanometar sa kosom cijevi.
- Jedan krak U-cevi je nagnut pod poznatim uglom α . Ako je ovaj ugao manji, preciznost očitavanja je veća.
- Ovaj mikromanometar najčešće služi za mjerenja razlika između dva pritiska.
- Razlika se određuje očitavanjem dužine l i slijedećim izračunavanjem:

$$\Delta p = p_a - p = \rho_f l \sin \alpha$$



Mikromanometar sa kosom U-cijevi

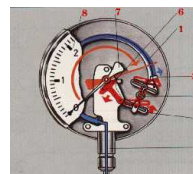


39

- Za određivanje većih nadpritisaka i podpritisaka u praksi se najčešće koriste manometri sa Burdonovom cijevi.

- Funkcioniše na elastičnom deformisanju savijene cijevi.
- Cijev (poz.1) se pod dejstvom pritiska elastično deformiše tako da se "ispravlja", a ta deformacija se prenosi na mehanizam (poz. 3,4,5 i 6), što ima za posledicu zakretanje kazaljke (poz. 7).
- Na kalibrisanoj skali (poz. 8) očitava se vrijednost pritiska.

- Elastična cijev je elipsastog poprečnog preseka.



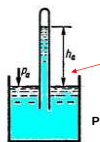
Manometar sa Burdonovom cevi

- Pritisak, p , je pozitivan ako je veći od atm.: $(p > p_{atm}) \Rightarrow p > 0$.
- Pritisak, p , je negativan ako je manji od atm.: $(p < p_{atm}) \Rightarrow p < 0$.

40

Barometar $\Rightarrow$ mjerenje apsolutnog p :

- Barometar $\Rightarrow$ staklena cijev na vrhu zatvorena $\Rightarrow$ donji kraj cijevi otvoren donji kraj cijevi uronjen u tečnost izloženu p_a



Princip rada barometra

Za barometre koristimo živu:
velika ρ $\Rightarrow$ cijev može biti kratka
dosta precizni barometri sa živom

-Iz cijevi iscpimo sav zrak $\Rightarrow$ tečnost se penje do određene h
ostale samo pare tečnosti u cijevi

-To je **max. h** do koje će se tečnost popeti u cijevi

-Na slobodnu površinu tečnosti djeluje p_a $\Rightarrow$ u cijevi na istoj dubini vlada isti p

$$p_a = \rho g h_a$$

41

SILA PRITISKA NA RAVNE I ZAKRIVLJENE POVRŠINE

- Tečni fluidi nalaze se u posudama, rezervoarima i sl.
- Zbog prisustva hidrostatičkog pritiska oni pritiskaju zidove rezervoara (npr).
- Treba poznavati intenzitet tog dejstva.
- Dejstvo na neku konkretnu potopljenu površinu manifestuje se rezultujućom silom pritiska.
- Bitno $\Rightarrow$ saznati gdje je napadna tačka te sile.

- Površina na koju djeluje sila pritiska fluida ravna (jednostavan slučaj u odnosu na slučaj kada je ta površina zakrivljena).



Hidrostatički pritisak na zidove podruma

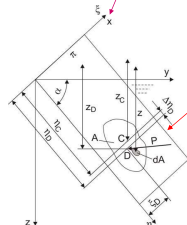
42

- Posmatramo ravnu površinu A koja se nalazi na ravni π , koja je nagnuta pod uglom α u odnosu na ravan slobodne površine tečnosti gustine ρ .

- Pravougli koordinatni sistem postavlja se tako da je osa x u preseku ravni π i ravni slobodne površine tečnosti.

- Osa y nalazi se u ravni slobodne površine tečnosti.

- Osa z usmerena je naniže.



Pritisak tečnosti na ravne površine

43

- Hidrostatički pritisak tečnosti u bilo kojoj tački prostora koju zauzima tečnost, na osnovu jednačine statike fluida je:

$$p = \rho g z$$

- Elementarna površina dA u posmatranoj površini A . Sila pritiska na tu površinu je:

$$dP = p dA = \rho g z dA$$

- * Proračun ukupne sile pritiska P na površinu A (integral prethodne jednačine):

$$P = \rho g \int_A z dA$$

- Izraz $\int_A z dA$ = statički moment inercije površine A u odnosu na x, y -ravan, i iznosi:

$$\int_A z dA = z_C A$$

- z_C najkraće rastojanje težišta C do slobodne površine tečnosti (x, y -ravan).

44

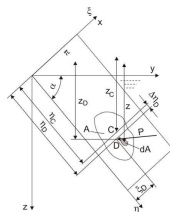
•Sila pritiska = $P = \rho \cdot g \cdot z_C \cdot A$

ili

$$P = p_C \cdot A$$

* Bilo koja od j-na (gore) može poslužiti da se odredi intenzitet sile hidrostatičkog pritiska na datu površinu.

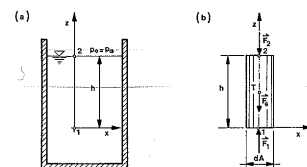
* Pri tome je p_C vrijednost hidrost. pritiska u tački C, koja je težište površine A.



45

PRIMJER:

•Treba odrediti pritisak p u homogenoj tečnosti na dubini h (prema slici za tečnost u otvorenoj posudi):



a) Otvorena posuda sa tečnošću b) Vertikalne sile na izdvojeni dio

•Položaj 1 = proizvoljna tačka na dubini h

•Položaj 2 = na površini tečnosti (vlada vanjski pritisak p_0)

•U hidrotehnici: vanjski pritisak obično kao atmosferski p_a

•Uzimamo: $p_0 = p_a$

46

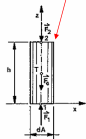
•Zamislimo: iz tečnosti u stanju mirovanja izdvojimo dio (valjak) površine dA i visine h
•Za uslov ravnoteže (održavanje mirovanja) usmjeru z-ose na osnovice valjka djeluju sile F_1 i F_2 preko pritisaka p i p_a , kao i vlastita težina valjka F_G .

•Tada imamo: $\sum F_z = 0 \Rightarrow F_1 - F_G - F_2 = 0 \Rightarrow p dA - \rho g h dA - p_a dA = 0$

F_1 = sila unutarnjeg pritiska na donju osnovicu valjka

F_2 = sila atmosferskog (vanjskog) pritiska na gornju osnovicu valjka

F_G = vlastita težina valjka



•Nakon sređivanja izraza (gore) dobijemo: $p = p_a + \rho g h$ (1)

Izraz (1) = veličina hidrostatičkog pritiska u tečnosti na dubini h (uvijek $p \geq 0$).

47

* Hidrostatički pritisak u nekoj tački tečnosti **ISTI** u svim smjerovima u toj tački.

* Relativni hidrostatički pritisak (p_r) = razlika punog (apsolutnog) i atmosferskog:

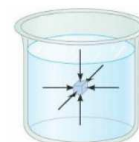
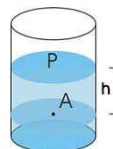
$$p_r = p - p_a = \rho g h$$

$p_r > p_a$ (predpritisak u tečnosti)

$p_r < p_a$ (podpritisak – vakuum u tečnosti, p_v)

•Kod vakuuma pritisak manji od atmosferskog

•Vrijednost pritiska vakuuma uvijek pozitivna: $0 \leq p_v < p_a$.



48

RAZDILOBA PRITISKA I SILA PRITISKA

• Grafički prikaz razdiobe hidrostatskog pritiska na neku površinu zove se

DIJAGRAM PRITISKA

- Diferencijalna sila pritiska uvijek okomita na površinu
- Dijagram (ukupnog) pritiska crta se okomito na površinu
- Razdioba pritiska raste linearno sa dubinom

VEOMA BITNO !

• Zadaci u hidrostatici (problemi):

- Traži se sila kojom tečnost djeluje na neku ograničenu P

- U svakoj tački površine odredimo pritisak (nactamo dijagram pritiska)

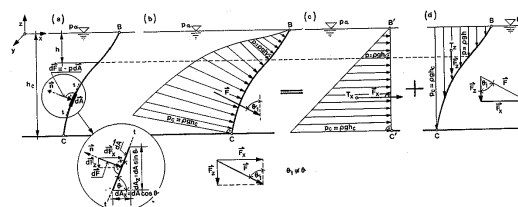
- Često u zadacima:

lakše odrediti ukupnu silu pritiska preko njene horizontalne i vertikalne komponente (treba provesti analizu hidrostatskog pritiska po komponentama sile pritiska)

49

* Razdioba pritiska i sila pritiska: na ravnim i zakrivljenim površinama

* Zakrivljena površina (primjer):



Dijagram pritiska i sila pritiska na zakrivljenu površinu

a) Geometrija površine b) Dijagram pritiska i ukupna sila pritiska c) Dijagram pritiska horizontalne komponente sile pritiska i horizontalna komponenta sile pritiska d) Dijagram pritiska vertikalne komponente sile pritiska i vertikalna komponenta sile pritiska

$$F_x = \rho g \int_A h (dA \sin \theta) = \rho g \int_A h dA_x \quad F_z = \rho g \int_A h (dA \cos \theta) = \rho g \int_A h dA_z \quad F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2}$$

50

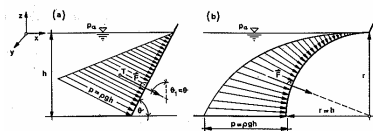
• Vrijednost pritiska (relativnog) u pojedinim tačkama površine:

$$p_r = p - p_a = \rho g h$$

• Hidrostatski pritisak UVIJEK djeluje okomito na površinu

• Ukupna sila pritiska sa površinom zatvara ugao različit od 90°

• Kod ravnih i cilindričnih površina: ukupna sila pritiska okomita na površinu



Dijagram pritiska i ukupna sila pritiska

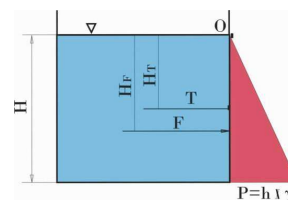
a) Ravna površina b) Cilindrična površina

* Ukupna sila F: $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_z = F_x \vec{i} + F_z \vec{k}$

51

• Horizontalna komponenta sile pritiska = težini tijela pritiska formiranog iznad projekcije posmatrane površine na vertikalnu ravan sa ordinatama koje odgovaraju vertikalnim udaljenostima od tačaka posmatrane površine do slobodne površine tečnosti

• Vertikalna komponenta sile pritiska = težini tečnosti koja se nalazi iznad posmatrane površine



Dijagram horizontalne komponente hidrostatskog pritiska

52

ARHIMEDOV ZAKON I PLIVANJE TIJELA



Arhimed iz Sirakuze (287 pne – 212 pne)

- Jedan od najgenijalnijih matematičara svih vremena i najveći fizičar Starog vijeka
- Problemima se u potpunosti posvećivao → crtao po pepelu
- Za tadašnju Sirakuzu → Arhimeda smatrali ludim
 ↓
 ipak sve te ljude spasio od Rimljana
- Najveću slavu stekao raspravama o zarobljenim geometrijskim tijelima
 ↓
 V i A računao složenim metodama (slično današnjem infinitezimalnom računu)
- Dao osnove hidrostatike i odredio približnu vrijednost broja π (3,14)

53

- Arhimedov zakon → uzvik "Eureka"

primjese neplemenitih metala u kruni kralja Hijerona (vladar Sirakuze)

vagao krunu u vodi i izvan vode u usporedbi sa čistim Au i Ag



$$M - M' = \rho V$$

$$(440 - 409)g = 1 \text{ g/cm}^3 V$$

$$V = 31 \text{ cm}^3 = > \rho_{Au} = 19.3 \text{ g/cm}^3$$

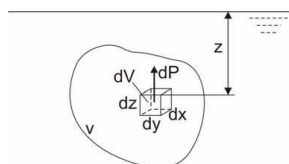
54

* Poznato je da tijela, koja se zarone u tečnost, nisu "tako teška", kao što su bila prije zaranjanja.

* Očigledno je da dejstvo hidrostatičkih sila prouzrokuje sile koje djeluju naviše, tako da rezultujuća sila, koja djeluje na tijelo, postaje manja od težine G ili se izjednačava sa nulom.

• Proučavanje zasnovano na analizi sila hidrostatičkog pritiska koje djeluju na tijelo.

• Tijelo zapremine V zaronjeno je u tečnost gustine ρ (slika):



Analiza dejstva sila pritiska na tijelo koje je zaronjeno u mirnu tečnost

55

• **Analiza:** posmatranje elementarne zapremine zaronjenog tijela, dimenzija dx , dy i dz , (nalazi se na dubini z).

• Na ovu elementarnu V djeluju sile pritiska sa svih strana.

• Bočne sile pritiska koje djeluju na površine $dx dz$ su međusobno jednake jer su na istoj dubini, (suprotnog su smjera i poništavaju se).

• Isto važi i za sile koje djeluju na površini $dy dz$.

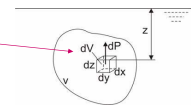
• Na elementarnoj površini $dx dy$ koja se nalazi dublje (dole) djeluje nešto veća sila nego na onu koja se nalazi gore.

• Ako se primjeni već prikazana j-na ($P = \rho g z_c A$) na ovaj slučaj može se izraziti rezultujuća sila dP :

$$dP = -\rho g z dx dy + \rho g (z + dz) dx dy$$

• Sređivanjem dobijamo:

$$dP = \rho g dz dx dy = \rho g dV$$



56

* Rezultujuća sila za cjelokupnu zapreminu V : $P = \rho g V$

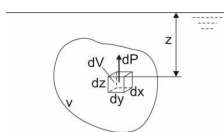
IZRAZ ZA SILU P JE ARHIMEDOV ZAKON

• Rezultujuća sila P naziva se sila pritiska (ili kraće pritisak).

• Intenzitet sile pritiska koja djeluje na tijelo zavisi od gustine tečnosti u koju je tijelo zaronjeno i od njegove V .

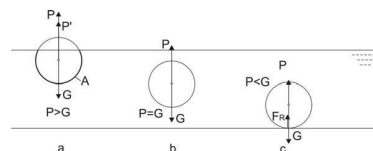
• Sila pritiska usmjerena je uvijek naviše – potisak (uzgon).

• U ovoj analizi tečnost je smatrana nestišljivom ($\rho = \text{const}$).



57

• Ukupna sila pritiska P na potpuno zaronjeno tijelo može biti veća, manja ili jednaka težini tela G (tijela plivaju, tonu ili lebde).



1. slučaj - tijelo pliva (pod a):

- Uslov za plivanje tijela je da je $P > G$.

- Kada je to tako tijelo će jednim dijelom isplivati na površinu toliko dok se dejstvo hidrostatičkog pritiska ne smanji dotle da se izjednači sa težinom G .

- Dejstvo hidrostatičkog pritiska - sila P' , u ovom slučaju je posljedica hidrostatičkog pritiska na okvašenu površinu A .

- Važiće $G = P'$.

58

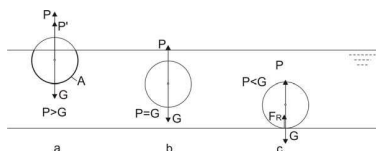
2. slučaj - tijelo lebdi (pod b):

- Sila pritiska jednaka je sili težini tijela $P = G$.

- Tijelo će biti potpuno okvašeno, ali ne mora da potone do dna.

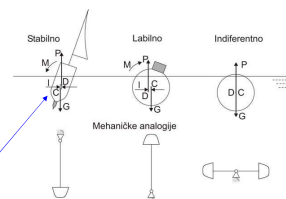
3. slučaj - tijelo tone (pod c):

- Sila pritiska je manja od težine tijela $P < G$.



59

PONAŠANJE TIJELA KOJA PLIVAJU:



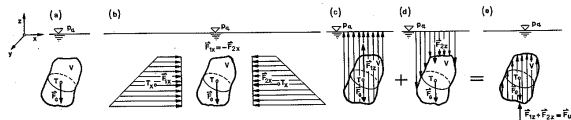
- Težište C ispod napadne tačke sile pritiska D tijelo će stabilno plivati (stabilna ravnoteža).

- Slučaj kada se tijelo izvede iz ravnoteže; pojavljuje se spreg sila P i G (one su na rastojanju l) koji rezultuje momentom M koji teži da tijelo vrati u ravnotežu (labilno plivanje). Napadna tačka sile pritiska ispod težišta i ako se tijelo izvede iz ravnoteže ono rotira i plivanje je nestabilno (labilno).

- Sila napadne tačke pritiska D poklapa sa težištem C , ne pojavljuje se nikakav rezultujući moment, (tijelo rotira dok na njega djeluje dodatna spoljna sila).

60

UZGON:



Tijelo uronjeno u homogenu tečnost

a) Oblik tijela b) Dijagram pritiska horizontalnih komponentata sile pritiska c) d) Dijagrami pritiska vertikalnih komponentata sile pritiska e) Dijagram rezultujućeg pritiska i rezultujuća sila pritiska

Rezultujuća vertikalna komponenta sile pritiska zove se **UZGON**.

$$\vec{F}_{xz} + \vec{F}_{yz} = \rho g V = \vec{F}_u$$

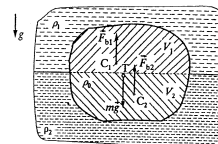
•Uzgon: prvi spoznao Arhimed (250 p.n.e.)

•Na svako tijelo uronjeno u tečnost djeluje **uzgon** usmjeren vertikalno uvis

•Uzgon $\rightarrow$ jednak težini tečnosti istisnute tijelom u vodi

61

SILA UZGONA NA GRANICI DVA FLUIDA:



Tijelo koje pliva na granici dva fluida

Slika: plivanje tijela na razdjeljenoj P dva fluida gustina ρ_1 i ρ_2 (apsolutno mirovanje)

•Gustina $\rho_1 < \rho_2$ (vektor masene sile uvijek gleda prema gušćem fluidu)

•Za $\rho_1 = \rho_2$ (pri izračunavanju sile uzgona ona se može zanemariti) i bilo bi:

Sila F_b uzgona:

$$F_b = \frac{\rho_1 g V_1}{F_{b1}} + \frac{\rho_2 g V_2}{F_{b2}}$$

62

•Ako tijelo miruje: rezultanatna sila i rezultanatni M na tijelo = 0, i tada:

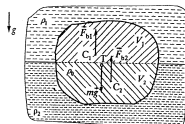
-Sila F_{b1} ima hvatište u težištu V_1 (tačka C_1)

-Sila F_{b2} ima hvatište u težištu V_2 (tačka C_2)

-Sila težine = u težištu T (centar mase) tijela

-Očito je da suma sila F_{b1} i F_{b2} = težina tijela i tačke C_1 i C_2 na istoj vertikali kroz T ili će biti jedna lijevo, a druga desno od tačke T

•Tijelo pliva: ako mu je $\rho_0 > \text{od}$ gustine ρ_1 , a manja od ρ_2



•Tijelo čija je $\rho_0 > \rho_2$: potonut će u fluid gustine ρ_2

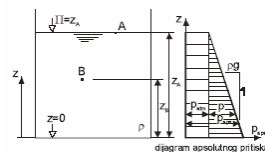
•Tijelo čija je $\rho_0 < \rho_1$: isplivalo bi na slobodnu P fluida gustine ρ_1

63

PRIMJENA OSNOVNE JEDNAČINE HIDROSTATIKE

- postupci rješavanja zadataka -

(1) Otvoreni sud sa jednom tečnošću



1. Izaberemo nultu kotu ($z=0$)

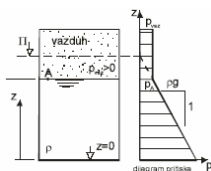
2. Π kota se uvijek nalazi na slobodnoj površini tečnosti ($p_a=0$)

3. Hidrostatički pritisak u bilo kojoj tački tečnosti možemo izračunati primjenom osnovne j-ne hidrostatike

$$p_a = \rho g (\Pi - z_a)$$

64

(2) Zatvoreni sud

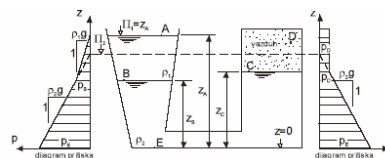


1. Izaberemo nultu kotu ($z=0$)
2. Zanimarujemo se p vazduha te je p u vazduhu const. Pritisak na kontaktu vazduha i tečnosti = pritisku u bilo kojoj tački vazduha $p_A = p_{\text{vaz}}$
3. Na osnovu poznatog p u tački A računamo Π kotu za tečnost

$$\Pi = z_A + p_A / \rho g$$

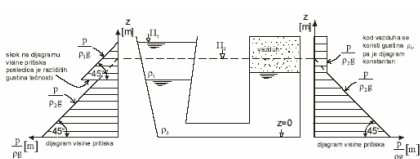
65

(3) Otvoreni sud sa više tečnosti



1. Izaberemo nultu kotu ($z=0$)
2. Polazimo od poznate Π kote tečnosti gustine ρ_1 (slobodna površina): $\Pi_1 = z_A$
3. Biramo tačku na kontaktu dvije tečnosti (B) i posmatramo je kao tačku tečnosti čiju Π kotu znamo: $p_B = \rho_1 g (\Pi_1 - z_B)$
4. Na osnovu poznatog p u zajedničkoj tački dvije tečnosti (B) računamo Π kotu za tečnost gustine ρ_2 : $\Pi_2 = z_B + p_B / \rho_2 g$
5. p u vazduhu je const ($p_{\text{vaz}}=0$) te je p u bilo kojoj tački (D) = p na kontaktu između vazduha i tečnosti (C): $p_C = \rho_2 g (\Pi_2 - z_C) = p_D$

66

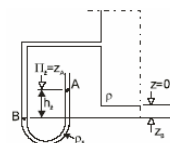


Napomena:

- U hidrotehnici uobičajno umjesto p koristiti visinu pritiska ($p / \rho g$) (m)
- Dijagram visine pritiska za tečnost uvijek zaklapa ugao 45° sa horizontalom

67

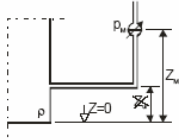
(4) Živin manometar



1. Izaberemo nultu kotu ($z=0$)
2. Postupak isti kao prethodni primjer (poznata Π kota jednog fluida – živa)
3. Na osnovu poznate Π kote H_B računamo p u tački na kontaktu dva fluida (B): $p_B = \rho_1 g (\Pi_1 - z_B)$
4. Na osnovu poznatog p u zajedničkoj tački dva fluida računamo Π kotu za fluid gustine ρ : $\Pi = z_B + p_B / \rho g$

68

(5) Otvoreni manometar



1. Izaberemo nultu kotu ($z=0$)
2. Otvoreni manometar pokazuje hidrostatski p tečnosti na koti na kojoj se nalazi manometar (z_m): $p_m = p_g(\Pi - z_m)$
3. Otvoreni manometar je samo specijalni slučaj diferencijalnog manometra kod koga je p sa jedne strane = 0